LAHENDUSED JA HINDAMISJUHIS XI klass

Eesti koolinoorte LIII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA KOOLIVOOR

Tallinnas, 2. detsembril 2005. a.

1.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 37 \\ x^2 + z^2 + xz = 28 \\ y^2 + z^2 + yz = 19 \end{cases}$$

Lahutan esimesest võrrandist teise ja teisest võrrandist kolmanda võrrandi. Saan võrrandite süsteemi

$$\begin{cases} (y - z)\cdot(x + y + z) = 9 \\ (x - y)\cdot(x + y + z) = 9 \end{cases}.$$

Seega $y - z = x - y$ ehk $2y = x + z$, mille asendan eelneva süsteemi teise võrrandisse:

$$(x - y)\cdot(2y + y) = 9$$
$$(x - y)\cdot 3y = 9$$
$$x = \frac{3}{y} + y$$

Saadud tulemuse asenda lähtesüsteemi esimesse võrrandisse:

$$x^2 + y^2 + xy = 37$$
$$\left(\frac{3}{y} + y\right)^2 + y^2 + \left(\frac{3}{y} + y\right)\cdot y = 37$$
$$3y^4 - 28y^2 + 9 = 0 \Rightarrow y_{1;2} = \pm 3 \text{ ja } y_{3;4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Muutuja x väärtused leian võrrandist $x = \frac{3}{y} + y$ ja muutuja z väärtused juba lähtesüsteemi teisest või kolmandast võrrandist.

Süsteemi lahendid on $\begin{cases} \mathbf{x_1 = 4} \\ \mathbf{y_1 = 3} \\ \mathbf{z_1 = 2} \end{cases}$, $\begin{cases} \mathbf{x_2 = -4} \\ \mathbf{y_2 = -3} \\ \mathbf{z_2 = -2} \end{cases}$, $\begin{cases} \mathbf{x_3 = \frac{10\sqrt{3}}{3}} \\ \mathbf{y_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}} \\ \mathbf{z_3 = -\frac{8\sqrt{3}}{3}} \end{cases}$ **ja** $\begin{cases} \mathbf{x_4 = -\frac{10\sqrt{3}}{3}} \\ \mathbf{y_4 = -\frac{\sqrt{3}}{3}} \\ \mathbf{z_4 = \frac{8\sqrt{3}}{3}} \end{cases}$.

1. Kahe muutujaga võrrandi avaldamine	3p
Ühe muutujaga võrrandi avaldamine	1p
Ühe muutujaga võrrandi lahendamine	2p
Vastuse leidmine	1p
	7p

LAHENDUSED JA HINDAMISJUHIS XI kl

1. Kaks šotlasest venda otsustasid hakata tegelema lambakasvatusega. Nad müüsid oma ühise omandi - lehmakarja - ja jaotasid saadud raha eest ostetud lambad omavahel. Iga lehma eest saadi nii mitu kuldraha, kui palju oli algselt karjas lehmi, iga lamba hinnaks oli 10 kuldraha. Lõpuks jäi vendadel järele alla 10 kuldraha, millest piisas täpselt noore oina ostuks. Nüüd oli ostetud loomi paarisarv ning jaotamine lihtsam. Ilmselt pidi aga see šotlane, kes sai noore oina, saama teiselt vennalt kompensatsiooniks teatava summa. Kui suure summa ta pidi saama?

2. Ülesanded tingimustest järeldub:

1) Kuna lambaid osteti paaritu arv, siis lehmade müügist saadud summas on kümneliste arv paaritu arv (paaritu arv × 10).

2) Lehmade müügist saadud rahasumma on täisarvu ruut (iga lehma eest saadi nii mitu kuldraha, kui palju oli algselt karjas lehmi).

Seega saadi lehmade müügist raha:

$$(10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2 \text{, kus } 0 \le a < \infty \text{ ja } 1 \le b \le 9$$

Analüüsin saadud avaldise kümneliste arvu.

- Liige $100a^2$ näitab sajaliste arvu, seega ei mõjuta ta kümneliste arvu.
- Liige $20ab$ annab paarisarvu kümnelisi.
- Paaritu arvu kümnelisi peab tagama liige b^2. See on võimalik vaid juhul, kui $b = 6$.

Niisis on oina hind 6 kuldraha, mis on 4 kuldraha väiksem lamba hinnast. Kompensatsiooniks tuleb hüvitada saadud kahjust pool, seega 2 kuldraha.

Maksta tuleb 2 kuldaraha.

2. Taipamine, et lehmade müügist saadud summas on kümneliste arv paaritu arv — 1p
   Taipamine, et lehmade müügist saadud rahasumma on täisarvu ruut — 2p
   Lahenduse lõpuleviimine — 4p

   7p

LAHENDUSED JA HINDAMISJUHIS XI kl.

3. Tõesta, et $\sin 10° \cdot \sin 30° \cdot \sin 50° \cdot \sin 70° = \frac{1}{16}$.

3. $\sin 10° \cdot \sin 30° \cdot \sin 50° \cdot \sin 70° = \ldots$

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

$$\ldots = \sin 10° \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 50° \cdot \sin 70° = \frac{\sin 10° \cdot \sin 50° \cdot \sin 70°}{2} = \ldots$$

Korrutan murru lugejat ja nimetajat teguriga $2\cos 10°$.

$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$

$$\ldots = \frac{2 \cdot \sin 10° \cdot \cos 10° \cdot \sin 50° \cdot \sin 70°}{2 \cdot 2\cos 10°} =$$

$$= \frac{\sin 20° \cdot \sin 50° \cdot \sin 70°}{4\cos 10°} = \ldots$$

Korrutan murru lugejat ja nimetajat teguriga $2\cos 20°$.

$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$

$$\ldots = \frac{2 \cdot \sin 20° \cdot \cos 20° \cdot \sin 50° \cdot \sin 70°}{4\cos 10° \cdot 2\cos 20°} = \frac{\sin 40° \cdot \sin 50° \cdot \sin 70°}{8 \cdot \cos 10° \cdot \cos 20°} = \ldots$$

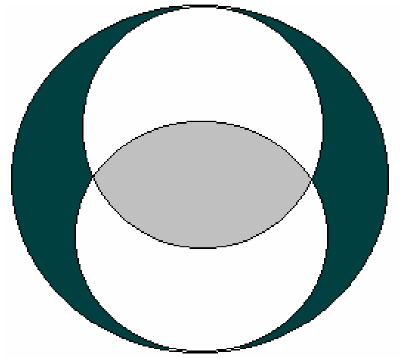
$\sin 70° = \cos 20°$ ja $\sin 50° = \cos 40°$

$$\ldots = \frac{\sin 40° \cdot \cos 40° \cdot \cos 20°}{8 \cdot \cos 10° \cdot \cos 20°} = \frac{\sin 40° \cdot \cos 40°}{8 \cdot \cos 10°} = \frac{\frac{1}{2}\sin 80°}{8 \cdot \cos 10°} = \frac{\cos 10°}{16\cos 10°} = \frac{1}{16}$$

$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$

M. o. t. t.

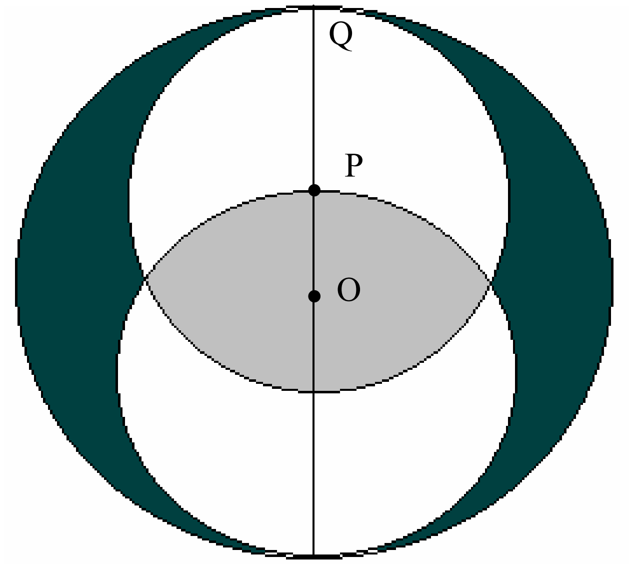
LAHENDUSED JA HINDAMISJUHIS XI kl.



4. Joonisel kujutatud kaks väiksemat ringjoont on võrdse raadiusega, läbivad teineteise keskpunkte ja puutuvad suurt ringjoont seestpooolt. Leia joonisel tumedalt värvitud ja heledalt värvitud alade pindalade vahe, kui kõigi kolme ringjoone keskpunktid asuvad ühel sirgel ja suure ringjoone raadius on 1.

Märkus. Osa aladest on värvimata.

Teen abistava joonise.



Ülesande tingimuste kohaselt $OQ = 1$.

Kuna väikeste ringjoonte keskpunktid asuvad suure ringjoone diameetril, jaotades selle kolmeks ühepikkuseks lõiguks, siis $PQ = \frac{2}{3}$.

Erinevalt värvitud piirkondade pindalade vahe saame, kui suure ringi pindalast lahutada kahe väiksema ringi pindala. Seega on otsitav vahe

$$\pi \cdot 1^2 - 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \pi - \frac{8}{9}\pi = \frac{\pi}{9}.$$

Vastus: Erinevalt värvitud piirkondade pindalade vahe on $\frac{\pi}{9}$.

4. Abistav joonis	1p
Väikese ringjoone raadiuse leidmine	3p
Nõutud pindalade vahe leidmine	3p
	7p

LAHENDUSED JA HINDAMISJUHIS

5. Tutvumisõhtul on iga inimene eelnevalt tuttav täpselt kolme inimesega. Leia kõik arvud N, mis saavad olla kõikide inimeste arvuks tutvumisõhtul.

Sobivad kõik paarisarvud alates neljast.

Et igal inimesel on täpselt kolm tuttavat ja kokku on inimesi N, siis tuttavate paare peab olema $\frac{3N}{2}$ (sest paaride kokkulugemisel loetakse iga paari topelt). Siit näeme, et N peab olema paarisarv.

Näitame nüüd, et iga paarisarvu (2 ei sobi juba ülesande algtingimustega) N korral on võimalik olukord, kus peol on täpselt N inimest. Selleks paigutame inimesed korrapärase N – nurga tippudesse. Olgu iga inimene tuttav naabertippudes asuvate inimestega ning lisaks vastastipus (paarisarvulise N korral on vastastipp olemas) asuva inimesega. Sel juhul on igal inimesel täpselt 3 tuttavat.

Näitab, et N on paarisarv	3p
Näitab, et sobivad kõik paarisarvud alates neljast.	4p
	7p